Μάθημα....................	:	**Θεμελιώδεις Έννοιες των Μαθηματικών** (Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων)
Ακαδημαϊκό Έτος..........	:	**2017 - 2018**
Περιεχόμενο................	:	**Εξεταστική Ιανουαρίου (24 ΙΑΝ 2018)**
Ημερομηνία Στοιχειοθεσίας	:	2019/08/28 (ώρα 21:18:04)
Δημιουργήθηκε από.......	:	Κυριάκος Γ. Μαυρίδης
Ηλεκτρονικό Ταχυδρομείο	:	• kyriakos.g.mavridis@gmail.com • kmavridi@uoi.gr
Ιστοσελίδα..................	:	http://users.uoi.gr/kmavridi/
Άδεια Χρήσης..............	:	*"Creative Commons Αναφορά Δημιουργού 4.0 Διεθνές"* (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Διδάσκοντες: Α. ΤΟΛΙΑΣ, Ε. ΝΙΚΟΛΙΔΑΚΗΣ

24 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2018

Θέμα 1. [1 μον.]
Αν p, q, r είναι τρεις λογικές προτάσεις ώστε οι $p \Rightarrow (q \wedge (\sim r))$ και $q \Rightarrow (p \wedge r)$ να είναι αληθείς, να δειχθεί ότι η $\sim (p \vee q)$ είναι αληθής. Ισχύει το αντίστροφο;

Θέμα 2. [2 μον.]
(i) Η ακολουθία συνόλων $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ορίζεται αναδρομικά ως εξής: $A_1 = \{\emptyset\}$, $A_{n+1} = \mathcal{P}(A_n) \setminus \{\emptyset\}$. Να βρεθούν τα σύνολα A_2, A_3, A_4.

(ii) Έστω A, B δύο σύνολα ώστε $A \cup B = A \cap B$. Να δείξετε ότι $A = B$.

(iii) Αν K, Λ, M, N είναι τέσσερα σύνολα, δείξτε ότι

$$(K \times \Lambda) \setminus (M \times N) = [K \times (\Lambda \setminus N)] \cup [(K \setminus M) \times \Lambda].$$

Θέμα 3. [2 μον.]
(i) Έστω σ μια διμελής σχέση σε ένα σύνολο E η οποία είναι αυτοπαθής (ανακλαστική), συμμετρική και αντισυμμετρική. Να δείξετε ότι για $x, y \in E$ ισχύει η ισοδυναμία $x\sigma y \Leftrightarrow x = y$.
(ii) Στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών ορίζουμε τη σχέση σ ως εξής:

$$a\sigma\beta \Leftrightarrow \text{ υπάρχει } q \in \mathbb{Q} \text{ ώστε } a - \beta = q^3.$$

Να εξετάσετε αν η σ είναι αυτοπαθής (ανακλαστική), συμμετρική, αντισυμμετρική και μεταβατική.

Θέμα 4. [2 μον.]
(i) Έστω $f : K \to \Lambda$ μια συνάρτηση. Να ορίσετε την εικόνα $f(A)$ για $A \subseteq K$ και την αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(B)$ για $B \subseteq \Lambda$. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ για κάθε $A \subseteq K$ και ότι $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ για κάθε $B \subseteq \Lambda$.
(ii) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^4$. Να βρεθεί το σύνολο $f(A)$ για $A = [-2, -1)$ και το σύνολο $f^{-1}(B)$ για $B = [1, 4)$.

Θέμα 5. [2 μον.]
(i) Έστω A μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $x = \sup A$ αν και μόνο αν το x είναι άνω φράγμα του A και ισχύει ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $a \in A$ με $a > x - \epsilon$.
(ii) Δίνονται a, β πραγματικοί αριθμοί με $0 < a < \beta$. Να δειχθεί ότι υπάρχουν q ρητός και r άρρητος ώστε $a < r^3 < q^2 - 2 < \beta$.

Θέμα 6. [2 μον.]
(i) Να δώσετε τους ορισμούς της ισοπληθικότητας (ισοδυναμίας) συνόλων (συμβ. $A \simeq B$) και να δείξετε ότι είναι μια σχέση ισοδυναμίας στην κλάση όλων των συνόλων.
(ii) Για A, B σύνολα ορίζουμε

$$A \precsim B \Leftrightarrow \text{ Υπάρχει } f : A \to B \text{ 1–1 συνάρτηση.}$$

Να δείξετε ότι η σχέση $\precsim$ είναι αυτοπαθής (ανακλαστική), μεταβατική αλλά δεν είναι συμμετρική ούτε αντισυμμετρική.
(iii) Αν K, M, N τρία πεπερασμένα σύνολα, να δείξετε ότι

$$\begin{aligned} \mathrm{card}(K \cup M \cup N) &= \mathrm{card}(K) + \mathrm{card}(M) + \mathrm{card}(N) \\ &\quad - \mathrm{card}(K \cap M) - \mathrm{card}(K \cap N) - \mathrm{card}(M \cap N) + \mathrm{card}(K \cap M \cap N). \end{aligned}$$

Καλή επιτυχία!

24 ΙΑΝ 2018

ΘΕΜΕΛΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΘΕΜΑ 1

(Παρόμοιο με Θέμα 2, 24 ΙΑΝ 2019)

p	q	r	$\sim r$	$q \wedge (\sim r)$	$p \Rightarrow (q \wedge (\sim r))$	$p \wedge r$	$q \Rightarrow (p \wedge r)$	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$
α	α	α	ψ	ψ	ψ	α	α	α	ψ
α	α	ψ	α	α	α	ψ	ψ	α	ψ
α	ψ	α	ψ	ψ	ψ	α	α	α	ψ
α	ψ	ψ	α	ψ	ψ	ψ	α	α	ψ
ψ	α	α	ψ	ψ	α	ψ	ψ	α	ψ
ψ	α	ψ	α	α	α	ψ	ψ	α	ψ
ψ	ψ	α	ψ	ψ	α	ψ	α	ψ	α
ψ	ψ	ψ	α	ψ	α	ψ	α	ψ	α

Ισχύει και το ευθύ και το αντίστροφο.

2

ΘΕΜΑ 2

(Παρόμοιο με το Θέμα 3, 24 ΙΑΝ 2019)

(i)

$$A_2 = \mathcal{P}(A_1) \setminus \{\emptyset\}$$
$$= \mathcal{P}(\{\emptyset\}) \setminus \{\emptyset\}$$
$$= \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \setminus \{\emptyset\}$$
$$= \{\{\emptyset\}\}$$

$$A_3 = \mathcal{P}(A_2) \setminus \{\emptyset\}$$
$$= \mathcal{P}(\{\{\emptyset\}\}) \setminus \{\emptyset\}$$
$$= \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\} \setminus \{\emptyset\}$$
$$= \{\{\{\emptyset\}\}\}$$

$$A_4 = \mathcal{P}(A_3) \setminus \{\emptyset\} = \mathcal{P}(\{\{\{\emptyset\}\}\}) \setminus \{\emptyset\}$$
$$= \{\emptyset, \{\{\{\emptyset\}\}\}\} \setminus \{\emptyset\}$$
$$= \{\{\{\{\emptyset\}\}\}\}$$

(ii) Εστω $x \in A$. Τοτε

$x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$ (επειδη $A \subseteq A \cup B$)

$\Rightarrow x \in A \cap B$ (επειδη $A \cup B = A \cap B$)

$\Rightarrow x \in B$.

Αρα $A \subseteq B$. Επισης

$x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$ (επειδη $B \subseteq A \cup B$)

$\Rightarrow x \in A \cap B$ (επειδη $A \cup B = A \cap B$)

$\Rightarrow x \in A$

Αρα $B \subseteq A$. Τελικα εχουμε οτι $A = B$.

(iii) (Ιδιο με το Θεμα 3(γ) του 24 ΙΑΝ 2019)

ΘΕΜΑ 3

(i) • Έστω ότι $x\sigma y$. Τότε επειδή είναι συμμετρική έχουμε ότι $y\sigma x$.

Λόγω αντισυμμετρικότητος, από τις $x\sigma y$ και $y \sigma x$ έχουμε ότι $x=y$.

• Έστω ότι $x=y$. Τότε επειδή είναι ανακλαστική έχουμε $x\sigma x$ οπότε και $x\sigma y$.

(ii)

• <u>ανακλαστική</u>: $a\sigma a$ αφού υπάρχει το $q=0$ να είναι ρητός και ισχύει $a-a=0=0^3$

• <u>συμμετρική</u>: Έστω ότι $a\sigma b$ τότε $\exists\, q_0 \in \mathbb{Q}$ τ.ω. $a-b=q_0^3$. Έτσι $b-a=-q_0^3 = (-q_0)^3$. Άρα για $q=-q_0$ έχουμε ότι $b\sigma a$.

- <u>αντισυμμετρικη</u>. Για $a=2$ και $b=1$ εχουμε $2-1=1=1^3$ και $1-2=-1=(-1)^3$. Επισης τα $1,-1$ ειναι ρητοι. Αρα $2\sigma 1$ και $1\sigma 2$ χωρις να εχουμε $2=1$, οποτε δεν ειναι αντισυμμετρικη.

- <u>μεταβατικη</u> Εχουμε: $a\sigma b$ και $b\sigma c$

$$\Rightarrow \left(\left(\exists q_1 \in \mathbb{Q}\right) \text{ τ.ω. } a-b=q_1^3 \;\wedge\; \left(\exists q_2 \in \mathbb{Q}\right) \text{ τ.ω. } b-c=q_2^3 \right)$$

$$\Rightarrow a-c=(a-b)+(b-c)=q_1^3+q_2^3$$

Για να ειναι μεταβατικη πρεπει οποια και αν ειναι τα q_1, q_2, παντοτε η ποσοτητα $q_1^3+q_2^3$ να μπορει να γραφει ως q_3^3, οπου $q_3 \in \mathbb{Q}$. Αυτο καταλαβαινουμε οτι μαλλον δεν συμβαινει παντοτε. Αρα σκεφτομαστε οτι μαλλον δεν ειναι μεταβατικη.

Για να το αποδείξουμε, πρέπει υποχρεωτικά να βρούμε συγκεκριμένο παράδειγμα έτσι ώστε να την μπορεί να γραφεί ως q_3^3.

Πράγματι, για $a=3$, $b=2$, $c=1$

Έχουμε

* $a-b = 3-2 = 1 = 1^3$, $1 \in \mathbb{Q}$
* $b-c = 2-1 = 1 = 1^3$, $1 \in \mathbb{Q}$
* $a-c = 3-1 = 2$

Όμως το 2 δεν μπορεί να γραφτεί ως q_3^3 για κάποιον $q_3 \in \mathbb{Q}$. Στην πραγματικότητα, $2 = (\sqrt[3]{2})^3$ και $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$.

Άρα δεν είναι μεταβατική.

ΘΕΜΑ 4

(i)

- $f(A) : \{\lambda \in \Lambda : \exists\, k \in A$ τ.ω $f(k) = \lambda\}$
- $f^{-1}(B) : \{k \in K : f(k) \in B\}$
- $\underline{A \subseteq f^{-1}(f(A))}$ Έστω $x \in A$ τότε $f(x) \in f(A)$ και συνεπώς από τον τρόπο ορισμού του $f^{-1}(B)$ που δόθηκε παραπάνω έχουμε ότι $x \in f^{-1}(f(A))$.
  Άρα $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.
- $\underline{f(f^{-1}(B)) \subseteq B}$ Έστω $y \in f(f^{-1}(B))$. Τότε $(\exists\, x \in f^{-1}(B))$ με $y = f(x)$. Όμως αφού $x \in f^{-1}(B)$, έχουμε $f(x) \in B$, άρα $y = f(x) \in B$. Συνεπώς $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

(ii)

- $f([-2,-1)) = \{y \in \mathbb{R} : y = x^4 \text{ για } x \in [-2,-1)\}$

$= (1, 16]$

- $f^{-1}([1,4)) = \{x \in \mathbb{R} : x^4 \in [1,4)\}$

$= (-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2})$

ΘΕΜΑ 5

(i) (είναι απόδειξη από το βιβλίο)

(ii) Η λυση ειναι παρομοια με το Θεμα 6(β) του 24 ΙΑΝ 2019 μεχρι και το σημειο "... να επιλεξετε το q..." , με τη διαφορα οτι εδω εχουμε αρρητους. Απο εκεινο το σημειο και μετα δουλευουμε στο διαστημα $\left(\sqrt{r^3+2}, \sqrt{\beta+2}\right)$ και απο το παραπανω θεωρημα εχουμε οτι υπαρχει $q \in \mathbb{Q}$ τ.ω. $\sqrt{r^3+2} < q < \sqrt{\beta+2}$. Ετσι $r^3 < q^2-2 < \beta$. Αρα τελικα εχουμε το ζητουμενο.

ΘΕΜΑ 6

10

(i) (Ειναι ο ορισμος και η προταση 6.2.1 απο το 6.2, σελ 160, Τσαμάτος)

(ii) <u>αυτοπαθης</u>: $A \preceq A \Leftrightarrow \exists f : A \to A$ η οποια ειναι 1-1. Η ταυτοτικη συναρτηση κανει αυτη τη δουλεια, αρα ισχυει.

<u>μεταβατικη</u>: $\left(A \preceq B \Rightarrow \exists f_1 : A \to B \text{ "1-1"}\right)$ και $\left(B \preceq \Gamma \Rightarrow \exists f_2 : B \to \Gamma \text{ "1-1"}\right)$

Θεωρουμε τη συναρτηση $g : A \to \Gamma$ με $g(x) = (f_2 \circ f_1)(x)$. Αυτη ως συνθεση "1-1" συναρτησεων ειναι επισης "1-1".

<u>συμμετρικη</u>:

Θεωρουμε τα συνολα $A = \{1,2\}$ και $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Τοτε $A \preceq B$ αφου η $f : A \to B$ με $f(1) = \alpha$ και $f(2) = \beta$ ειναι "1-1". Ομως δεν υπαρχει $g : B \to A$ που να ειναι "1-1"

(11)

Πράγματι, για παράδειγμα αν $f(\alpha)=1$ και $f(b)=2$ τότε αναγκαστικά $f(\gamma)=1$ ή $f(\gamma)=2$ συνεπώς δεν είναι 1-1. Ομοίως αντιμετωπίζονται και οι άλλες περιπτώσεις.

<u>αντισυμμετρική:</u> Θεωρούμε τα σύνολα $A=\{1,2,3\}$ και $B=\{a,b,\gamma\}$. Τότε η $f: A\to B$ με $f(1)=a$, $f(2)=b$ και $f(3)=\gamma$ είναι "1-1" άρα $A\preceq B$. Επίσης, η $g: B\to A$ με $g(a)=1$, $g(b)=2$, $g(\gamma)=3$ είναι "1-1" άρα $B\preceq A$. Αλλά προφανώς $A\neq B$.

(iii) Θεωρούμε γνωστή τη σχέση (Τσαγκάτος, σελ 173 6.5.3(iii))

$$\operatorname{card}(A\cup B)=\operatorname{card}A+\operatorname{card}B-\operatorname{card}(A\cap B)$$

Έτσι έχουμε:

$$\operatorname{card}(K\cup M\cup N)=\operatorname{card}((K\cup M)\cup N)$$

$$=\operatorname{card}(K\cup M)+\operatorname{card}N-\operatorname{card}((K\cup M)\cap N)$$

$$= \operatorname{card} K + \operatorname{card} M - \operatorname{card}(K \cap M)$$

$$+ \operatorname{card} N - \operatorname{card}\big((K \cap N) \cup (M \cap N)\big)$$

$$= \operatorname{card} K + \operatorname{card} M + \operatorname{card} N$$

$$- \operatorname{card}(K \cap M) - \operatorname{card}(K \cap N) - \operatorname{card}(M \cap N)$$

$$+ \operatorname{card}\big((K \cap N) \cap (M \cap N)\big)$$

= — 〃 〃 —

— 〃 〃 —

$$+ \operatorname{card}(K \cap N \cap M)$$